

國立中正大學109學年度大學個人申請入學招生考試試題

系所：數學系

科目：基本數學

(共3頁, 第1頁)

一、單選題。每題5分, 共20分。

1. 設 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 為空間中的三向量, 且 $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -6$, 求由 $(3\vec{a} + 2\vec{b}), (\vec{b} + \vec{c}), \vec{c}$ 三向量所形成的平行六面體之體積=

(A) 12 (B) 18 (C) 24 (D) 以上皆非

2. 一組二維數據, 滿足 $\sum_{i=1}^5 x_i = 25, \sum_{i=1}^5 y_i = 350, \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 135, \sum_{i=1}^5 y_i^2 = 25500,$
 $\sum_{i=1}^5 x_i y_i = 1840$, 利用迴歸直線預測 $x = 4.5$ 的值為

(A) 62.5 (B) 65.5 (C) 67.5 (D) 以上皆非

3. 兩複數 w, z 滿足方程式 $w = 2z + \frac{1}{2i}$, 當 $|z| \leq 1$ 時求 $|w|$ 的最大值=

(A) $\frac{5}{2}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{17}}{2}$ (D) 以上皆非

4. 某民調中心在 A, B 兩地進行相同議題的抽樣調查, 成功調查之人數分別為 n_A, n_B , 其統計結果得到之信賴區間分別為 $[0.54, 0.66]$ 和 $[0.5, 0.7]$ 。如果 A 地是68%信心水準下的信賴區間, 而 B 地是95%信心水準下的信賴區間, 則 $n_A : n_B =$

(A) 3 : 5 (B) 5 : 6 (C) 36 : 25 (D) 以上皆非

二、填充題。每題5分, 共60分。

1. 令 a, b 為實數, 且二階方陣 $\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ 將直線 $2x - 3y = 1$ 變換成 $3x - 8y + 1 = 0$,

求序對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

2. 設 $f(x)$ 為滿足以下條件的最低次多項式: $f(x)$ 的最高項係數為1, 且 $-5, -2i, (2+3i)$ 皆為方程式 $f(x) = 0$ 的根 (其中 $i^2 = -1$), 則 $f(x)$ 的 x 項係數= _____。
3. 若方程式 $\left(\log \frac{x}{5}\right)\left(\log 3x\right) = 1$ 的兩根為 α 與 β , 求 $\alpha\beta$ = _____。
4. 令 n 是正整數, $f(n) = (n+1)(0.9)^n$, 求 $f(n)$ 之最大值= _____。
5. 從 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 這些數字中每次取出不同的五個, 作成五位數的正整數, 其中有 _____ 個是4的倍數。
6. 求函數 $f(x) = -6 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - \cos x$ 的最大值= _____。
7. 請問 m 在什麼範圍內取值 _____, 直線 $y = m(x+1)$ 和橢圓 $\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ 會相交?
8. 設 $\triangle ABC$ 中, $\overline{BC} = a, \overline{CA} = b, \overline{AB} = c$ 且 $-2a + b + c = 0, 4a + 2b - 5c = 0$, 求 $\cos(A)$ 之值= _____。
9. 若圓 C 之方程式為 $x^2 + y^2 = 100$, 且 $A(0,6), B(8,0)$ 為圓內兩點。假設 P 為圓 C 上任意一點且使 $\triangle PAB$ 之面積最大, 求 P 之座標= _____。
10. 空間中 E_1, E_2 平面的交角為 45° , E_1 上一點 A 在 E_2 平面上的投影為 B 點, 若 A 到平面 E_2 的距離為3, 若 A 到 E_1 與 E_2 的交線 L 上一點 D 的距離為8, 求 \overline{BD} 之長度= _____。

11. 若存在實數 x, y, z 使得 $\frac{y+2z}{x} = \frac{x+2z}{y} = \frac{x+2y}{z} = k$, 求實數 k 之值 = _____。
12. 已知雙曲線 Γ 的兩漸進線為 $4x+3y=5$, $4x-3y=11$, 其中一個焦點之座標為 $(2,9)$, 則 Γ 的方程式為: _____。

三、計算與證明題。每題10分, 共20分, 需列出解題過程, 只有答案沒有過程得零分。

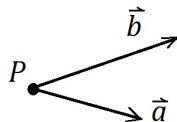
1. (a) (6分) 求以下級數之和:

$$\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{3^2-1} + \frac{1}{4^2-1} \cdots + \frac{1}{n^2-1}$$

- (b) (4分) 請問以下無窮級數是否收斂? 為什麼?

$$\frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{3^2-1} + \cdots + \frac{1}{n^2-1} + \cdots$$

2. 令 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 為空間中以 P 為起點的兩個不平行的非零向量(如下圖)。



- (a) (6分) 求向量 $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3) \neq \vec{0}$ 滿足方程式
$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{c} = 0, \\ \vec{b} \cdot \vec{c} = 0. \end{cases}$$

- (b) (4分) 上圖中, 令 E 為向量 \vec{a} 與向量 \vec{b} 所展成的平面, L_1, L_2 則分別為經過 \vec{a}, \vec{b} 之直線。設直線 L 與平面 E 相交於 P 且與 L_1, L_2 都垂直, 試證明直線 L 與平面 E 垂直。