國 立 中 正 大 學 108 學 年 度 大 學 個 人 申 請 入 學 招 生 考 試 試 題

系所：數學系　　科目：基本數學

一、單選題。每題七分，共 63 分。

1. 試看某同學的無效證明『證明 2 等於 1』。

   步驟 1：令 a=b≠0；

   步驟 2：兩邊同乘以 a 再減去 b^2，得到 $a*a-b^2=a*b-b^2$；

   步驟 3：將兩邊因式分解，得到(a+b)(a-b)=b(a-b)；

   步驟 4：兩邊同除以(a-b)，得到 a+b=b。

   步驟 5：因為 a=b，得到 b+b=b。

   步驟 6：兩邊同除以 b，得到 2=1。

   Q：以上步驟 1~6，從哪一步開始出錯？

(A) 步驟 6

(B) 步驟 4

(C) 步驟 1

2. Q：命題『3 個正整數 A,B,C, 若$A^2+B^2=C^2$，則 A,B,C 中至少有一個為 5 的倍數。』，此命題等價於下列哪個命題？

   【此為數學證明中常用邏輯】

(A)『3 個正整數 A,B,C, 若 A,B,C 皆非 5 的倍數，則$A^2+B^2\neq C^2$。』

(B)『3 個正整數 A,B,C, 若$A^2+B^2\neq C^2$，則 A,B,C 皆非 5 的倍數。』

(C)『3 個正整數 A,B,C, 若 A,B,C 中至少有一個為 5 的倍數，則$A^2+B^2=C^2$。』

3. Fibonacci sequence: $a_1=1, a_2=1, a_3=2, a_4=3, a_5=5, \ldots, a_{n+1}=a_n+a_{n-1}, \ldots$。

   Q：下列何者亦可表示此數列的一般項a_n？

   【線性代數課程將會介紹如何得到此一般項】

(A) $a_n=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

(B) $a_n=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^n\right)$

(C) $a_n=\frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)(1-6)}+\frac{(n-1)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)}{(2-1)(2-3)(2-4)(2-5)(2-6)}+2\frac{(n-1)(n-2)(n-4)(n-5)(n-6)}{(3-1)(3-2)(3-4)(3-5)(3-6)}+$
$3\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-5)(n-6)}{(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)(4-6)}+5\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-6)}{(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)(5-6)}+8\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{(6-1)(6-2)(6-3)(6-4)(6-5)}$

4. x_1,x_2,x_3 滿足下列限制式，求 $2x_1+x_2+3x_3$ 的最小值。

$$\begin{cases} 5x_1+2x_2+7x_3 \geq 420 \\ 3x_1+2x_2+5x_3 \geq 280 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq \ 0, x_3 \geq \ 0 \end{cases}$$

(A) 175
(B) 185
(C) 195

5. m,n 為兩**相異**正整數，且$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{2}{5}$。Q：$x^y+y^x$的個位數字為何？

(A) 5
(B) 0
(C) 2

6. 以C_k^n表示二項式係數，$C_k^n=\frac{n!}{k!(n-k)!}$，求正整數 n 使得

$$C_0^n-\frac{1}{4}C_1^n+\frac{1}{16}C_2^n-\cdots+\frac{(-1)^n}{4^n}C_n^n<0.5(10^{-6})\text{且}$$

$$C_0^{n-1}-\frac{1}{4}C_1^{n-1}+\frac{1}{16}C_2^{n-1}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{4^{n-1}}C_{n-1}^{n-1}\geq 0.5(10^{-6})\text{。}$$

【利用 log 2=0.3010, log 3=0.4771】。

(A) 49
(B) 50
(C) 51

7. 橢圓 E: 4(x^2)+9(y^2)=36，點 P(x,y)在橢圓 E 上。

Q：求點 P 到直線 x+2y+15=0 的最小值。

提示：利用 Cauchy 不等式求$(x+2y)^2$ 的極值，再求$|x+2y+15|/\sqrt{5}$的極值。

【Cauchy 不等式：$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geq(ac+bd)^2$, 等號成立時 a:b=c:d】

【在微積分課程中會用更直接的作法】

(A) $4\sqrt{5}$
(B) $9/2$
(C) $2\sqrt{5}$

8. Fibonacci sequence: $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, \ldots,\ a_{n+1} = a_n + a_{n-1}, \ldots$
令其相鄰項的比例為 $r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}, \forall n \geq 1$，則$r_{n+1} = 1 + \frac{1}{r_n}$。若數列 r_n收斂到一正數 φ。則φ滿足$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$。求此正數$\varphi$(此數字恰為黃金比例數字)。

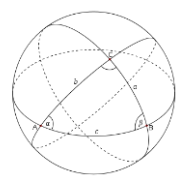
【中間一個重要步驟數列r_n收斂，將在高等微積分課程中證明】

(A) 1.62

(B) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(C) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

9. 在球面上，點依舊不變，但線不再是「直線」，而是兩點之間在球面上最短的距離，稱為**<u>測地線</u>**。在球面上，兩點間最短線是大圓的弧，球面幾何中的角定義在為兩個邊



大圓之間的夾角。 <Figure from wikipedia>

【球面上的餘弦定理】球面三角形 ABC 的三頂點是 A、B、C，其所對應的三邊長分別為a, b, c, 則 $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$ 。(此處皆用弧度)

Q：單位球球面上三角形 ABC，其中有兩邊長為$\frac{\pi}{2}$，此兩邊的夾角為$\frac{3\pi}{4}$，求角 A+角 B+角 C=?。【幾何學課程中將會介紹在球面幾何上更進階的性質】

(A) π

(B) $7\pi/4$

(C) 2π

二、填充題。共 14 分。

10. (i)(2 分) 三角函數公式 sinθ+$\sqrt{3}$cosθ=____sin(_____)。

(ii)(2 分) 兩組數據$\{x_i\}_{i=1\ldots n}$、$\{y_j\}_{j=1\ldots n}$，寫下其相關係數公式__________。

(iii)(2 分) 寫下極座標(r,θ)與直角坐標(x,y)之間變換的公式__________。

(iv)(8 分) 函數 $f(x)$，x 為實數，$f(x)$滿足$f(a+b) = \frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$且$f(1) = 2$。 $f(2019) = \frac{m}{n}$，*m*,*n* 為互質整數。*m*=_______。

三、計算證明題。兩題共 23 分。

11. (10 分) 已知四實數 a,b,c,d 滿足行列式$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=0$。證明：存在實數 m,n 使得二元一次連立方程組$\begin{cases} ax+by=m \\ cx+dy=n \end{cases}$無解。

12. (13 分)

國中時期教過一元二次方程式$ax^2+bx+c=0$的公式解。而三次方程式$x^3+ax^2+bx+c=0$的公式解，可以先做轉換$y=x+\frac{a}{3}$將原方程式轉化為$y^3+py+q=0$的形式。這裡我們透過解$y^3+3y-1=0$的範例，來熟悉三次方程式公式解的求法。

令解$y=u+v$，這裡$y,u,v\in\boldsymbol{C}$。當$uv=-1$時，可推得u^3,v^3為一元二次方程式$s^2-s-1=0$的兩個解。

(i) 求$s^2-s-1=0$的解s=__________。令其中一解 s_1 為u^3，另一解 s_2 為v^3。

(ii) 利用 DeMoivre’s formula(棣美弗公式)解出三個u=_________。 (同理可解出v。)

【$z^3=1$有三個解，兩個為複數，一個為實數。u^3=s_1 有三個解。】

(iii) 利用$uv=-1$，得到三組u,v。$u+v$即為$y^3+3y-1=0$在複數域上的三個解。

三個解$y=$__________。

【以上提及了部分數學系的課程名稱，以及部分上課時候如同加減乘除一般運用自如的中學計算部分。我們需要有熱誠可以一天 24 小時思考與計算數學的新苗。】

【相信你的直覺，加入中正數學。】

國 立 中 正 大 學 108 學 年 度 大 學 個 人 申 請 入 學 招 生 考 試 答 案 卷

系所：數學系 科目：基本數學

姓名：________________________ 准考證號碼：_________________

一、單選題。每題七分，共 63 分。

1.	2.	3.	4.	5.
6.	7.	8.	9.	

二、填充題。(i)(ii) (iii)各 2 分， (iv)8 分。共 14 分。

10 (i)	10 (ii)	10 (iii)	10 (iv)
___sin(______)			

三、計算證明題。共 23 分。請自行分隔第 11. 12. 題。
