國立中正大學110學年度大學個人申請入學招生考試試題

系所：數學系　　科目：基本數學

第一部份：填充題，每題5分，填寫出正確答案即可，不需列出計算過程。

1. $f(t)=\sin^2 2t-3\cos^2 t$，$0\le t\le\pi$，則$f(t)$的最大值爲 $\frac{1}{16}$ 。

2. 在△ABC中，$\overline{BC}=3$，$\overline{CA}=4$，$\overline{AB}=5$，若P爲△ABC內部一點，且P到$\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$分別爲 x, y, z，則$\frac{3}{x}+\frac{4}{y}+\frac{5}{z}$的最小值爲 12 。

3. 遞迴數列$\langle a_n\rangle$滿足$a_n=a_{n-1}+f(n-2)$，其中$n\ge 2$且$f(x)$爲二次多項式。若$a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=5$, $a_4=12$，則$a_5=$ 25 。

4. 設k爲實數，且對任意實數x, $kx^2+4x+k-3$之值恆爲正，則k之範圍爲 $k>4$ 。

5. 若a爲正整數且方程式$5x^3+(a+4)x^2+ax+1$的根都是有理根，則 $a=$ 5, 7

6. 通過點$P\ (4,2)$對圓$(x+2)^2+(y-2)^2=10$作二切線，若切點爲Q、R，則ΔPQR之外接圓方程式爲 $(x-1)^2+(y-2)^2=9$

7. 圓上有12個點將圓周等分，則任選三個點皆可形成一個三角形。請問在這些三角形中有 60 個不同的直角三角形（形狀相同頂點不同者，視爲不同的三角形）。

8. 設 $a_1, a_2, ..., a_9$ 爲等差數列且 k 爲實數。若方程組

$$\begin{cases} a_1x - a_2y + 2a_3z = k+1 \\ a_4x - a_5y + 2a_6z = -k-5 \\ a_7x - a_8y + 2a_9z = k+9 \end{cases} \qquad (1)$$

有解，則 $k =$ ___-5___。

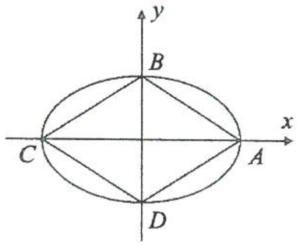
9. $a, a, b, b, b, c, d, e, f$ 共 9 個字母排成一列，三個 b 兩兩不相鄰，有幾種排法？ 12600

10. 假設

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

則 $A^2 + 2A + 2A^{-1} =$ ______________。 $\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

11. 如圖（此爲示意圖），A, B, C, D 是橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ 的頂點。若四邊形 $ABCD$ 的面積爲 58。則 $a =$ ______________。 $\frac{29}{4}$



12. 坐標平面上，圓 Γ 完全落在四個不等式：$x - y \le 4$, $x + y \le 18$, $x - y \ge -2$, $x + y \ge -24$，所圍成的區域內。則 Γ 最大可能面積爲___9π___。

13. 自塔的正西方一點 A，測得塔項的仰角爲 $45°$。在塔的南 $60°$ 西一點 B，測得塔項的仰角爲 $60°$。若 A 、B 兩點相距40 公尺，則塔高爲 $40\sqrt{3}$ 。

14. 求 $\log\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\log\left(1-\frac{1}{3^2}\right)+\log\left(1-\frac{1}{4^2}\right)+\log\left(1-\frac{1}{5^2}\right)+\ldots=$ ______ $-\log 2$

15. 不透明袋中有 3 白 3 紅共 6 個球，球大小形狀相同，僅顏色相異。甲、乙、丙、丁、戊 5 人依甲第一、乙第二、......、戊第五的次序，從袋中各取一球，取後不放回。試問在甲、乙取出不同色球的條件下，戊取得紅球的機率爲 $\frac{1}{2}$ 。

16. 假設 $P(x,y)$ 是橢圓 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ 上的點，點 P 到直線 $L:3x+4y=25$ 的最短距離是______。

第二部份：計算與證明題（每題10分，共20分，需列出解題過程）

1. 已知 $A(1,-5),B(3,-3)$ 且 P 爲圖形 $4x^2+9y^2=36$ 上的動點。求 ΔABP 面積之最大值以及最小值。

2. （數學歸納法）若 n 是任意正整數，試證 $(\sqrt{3}+1)^{2n+1}-(\sqrt{3}-1)^{2n+1}$ 是正整數，並且可被2^{n+1} 整除。