# 國立中正大學107學年度大學個人申請入學招生考試試題

系所：數學系　　科目： 基本數學



第一部份: 填充題(每題5分, 共80分. 填寫正確答案即可, 不需列出計算過程)

1. 求函數 $\dfrac{1}{\sqrt{20-x-x^2}}$ 的值域.

2. 如果 $(x,y)$ 在直線 $x+2y=3$ 上變動, 求 $M=3^x+9^y$ 的最小值.

3. $a, a, a, b, b, c, d, e$ 共 8 個字母排成一列, 三個 $a$ 兩兩不相鄰, 有幾種排法?

4. 某考試由10題是非題組成(每題10分) 且答錯不倒扣分數, 若完全利用猜測, 求成績達80分以上的機率.

5. 甲說謊的機率爲 0.1, 乙說謊的機率爲 0.3. 假設袋子裡裝有 4 顆白球, 3 顆黑球. 自袋中任取出一球, 甲說是白球, 乙則說是黑球. 求此球確實爲白球的機率.

6. 求 $\left(11^5-16\times 11^4+55\times 11^3+8\times 11^2-72\times 11+80\right)$ 之值.

7. 求 $\log\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)+\log\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)+\log\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)+\log\left(1-\dfrac{1}{5^2}\right)\ldots$ 之值.

8. 令 $a_n=1+2+3+\ldots n$, $b_n=\dfrac{a_1\cdot a_2\cdots a_n}{n!(n+1)!}$. 求 $S_n=\sum_{i=1}^{n} b_i$ 之值.

9. 袋中有編號 1, 2, 3 的球各一顆, 任取出一球記下號碼後放回袋中再取出一球, 求兩球數字之和的變異數.

10. 已知四邊形 $ABCD$ 中, $\angle A = 75^o$, $\angle B = 60^o$, $\angle D = 90^o$ 且 $\overline{AB} = \sqrt{3}+1$, $\overline{BC} = 2$. 求此四邊形之面積.

11. 已知 $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{7\pi}{6}$, 求函數 $f(x) = \sin^2 x + \frac{1}{2}\cos x - 1$ 之最小值。

12. 求通過 $A(-3,4)$, $B(1,1)$ 兩點, 並且以 $x$ 軸爲準線之拋物線的焦點座標.

13. 已知雙曲線的漸近線爲 $3x-2y+1=0$ 與 $3x+2y-7=0$, 並且通過 (3,4) 點, 求其貫軸長.

14. 求橢圓 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 在 $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$ 處的切線方程式.

15. 方程式 $x^8 = 8\sqrt{3} + 8\,i$ $\left(i = \sqrt{-1}\right)$ 的 8 個解在複數平面上, 以其爲頂點可以圍成一個凸八邊形, 求此八邊形的面積.

16. 設 $a, b$ 爲實數, 若 $\lim_{x\to 1} \frac{a\sqrt{x+3}-b}{x-1} = 1$, 求數對 $(a,b)=$ ____.

第二部份: 計算與證明題(每題10分, 共20分. 需列出解題過程)

1. 已知 $A(1,-5)$, $B(3,-3)$. 且 $P$ 爲圖形 $4x^2+9y^2=36$ 上的動點, 求 $\triangle ABP$ 面積之最大值以及產生最大值時 $P$ 之座標.

2. (a) 令 $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$, 試證 $S_{2^m} > 1 + \frac{m}{2}$.

   (b) 利用這個結果證明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 爲發散級數.