國 立 中 正 大 學 111 學 年 度 大 學 申 請 入 學 招 生 考 試 試 題

系所：數學系　　　科目：基本數學

請一律於答案卷上作答

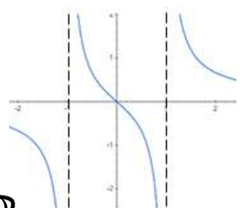
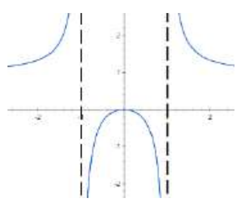
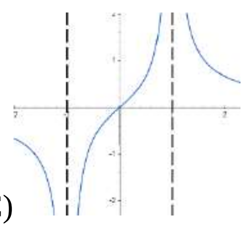
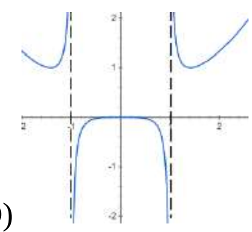
基礎題

一、單選題。每題四分，共 8 分。

1. ____下列哪個不等式的所有實數解為”x=0 或 $x\geq 1$”?

   (A) $x(x-1)\geq 0$
   (B) $x(x-1)\leq 0$
   (C) $x^2(x-1)\geq 0$
   (D) $x^2(x-1)^2\geq 0$
   (E) 以上皆非。

2. ____下列何圖是$y=f(x)=\frac{x}{x^2-1}$ 在(x,y)=(0,0)附近的圖形?


(A)

(B)

(C)

(D)

(E)以上皆非。

二、填充題。每題四分，共 16 分。

3. 求一元二次方程式 $2.27(x^2)-30.9x-145=0$的$\boxed{\text{所有}}$實數解 x。
   若實數解 x 不存在，請寫下不存在。 $x=\dfrac{30.9\pm\sqrt{2271.41}}{4.54}$

4. 求$\boxed{\text{所有}}$可能的實數 A、B 值，使得極限 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+A}{x-1}=$ B 成立。
   若不存在此實數 A、B，請寫下不存在。 A=-2, B=3.

5. $f(x)=(1+x)^5$，利用 $f(x)$在 x=0 附近的一次近似，估計$(0.99)^5$的近似值。
   若近似值不存在，請寫下不存在。 0.95
   提示：$(0.99)^5=(1-0.01)^5$

6. 寫出滿足四元一次聯立方程組$\begin{cases} x+\qquad z+w=0 \\ y-z+2w=0\end{cases}$ 的$\boxed{\text{所有}}$實數解 x,y,z,w。 $z\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix}$ for $z,w\in\mathbb{R}$
   若實數解 x,y,z,w 不存在，請寫下不存在。
   or $x\begin{pmatrix}1\\0\\-2/3\\-1/3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\1/3\\-1/3\end{pmatrix}$ for $x,y\in\mathbb{R}$

   or other equivalent relations.

中階題

三、單選題。每題七分，共 7 分。

7. ____ 兩複數 w,z 滿足方程式 $w=3z+\frac{1}{2i}$，當$|z|\le 1$ 時，求$|w|$的最大值。

(A) 7/2
(B) 5/2
(C) 3/2
(D) $\sqrt{17}/2$
(E) 以上皆非。

四、填充題。每題七分，共 35 分。

8. 假設點 P(x,y)是橢圓$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$上的點，求點 P($x,y$)到直線 $4x+5y=20$ 的最短距離。
若此最短距離不存在，請寫下不存在。 $\frac{3}{\sqrt{41}}$ 單位長

9. R={(x,y,z)| z=0, $x\ge 0$, $4\ge y\ge x^2$}，求此區域 R 在 xyz 空間中繞 x 軸旋轉所得的旋轉體體積。
若此旋轉體體積不存在，請寫下不存在。 $\frac{128}{5}\pi$ 立方單位

10. 求函數 $f(x)=5\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2})+\cos(x)$的最大值。 6
若最大值不存在，請寫下不存在。

11. 求函數 $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2-3x$ 在閉區間 $-2\le x\le 5$ 的最大值。
若最大值不存在，請寫下不存在。 5/3

12. 設三角形 ABC 的內心為 I。將內心 I 分別與頂點 A、B、C 以線段相連，與三角形的三邊圍出的三個面積分別為 5、6、7 的小三角形。求此三角形 ABC 的內切圓面積。
若此內切圓不存在，請寫下不存在。 $\frac{4\sqrt{6}}{3}\pi$

五、選擇題。每題十分，共 20 分。
不作答時，該題得 0 分。有作答時，單一個選項 2 分，不倒扣。

13. _______有二維數據如右表，已知用最小平方法求得最適直線的斜率為 3，且 x,y 的相關係數為 r，則下列選項何者正確?

x	1	2	3
y	2	4	$2a$

(A) $a=2$
(B) $a=3$
(C) $r=\frac{3\sqrt{70}}{35}$
(D) $r=\frac{2\sqrt{5}}{5}$
(E) 以上皆非。

14. ________ 求$\boxed{\text{所有}}$可能的實數 k 值，使得三元一次聯立方程組$\begin{cases} x-y-z=kx \\ 3x \quad +2z=ky \\ 2x \quad +3z=kz \end{cases}$有無窮多組實數解 x,y,z。

(A) $k = 0$
(B) $k = 1$
(C) $k = -1$
(D) 尚有其他不是 0, 1, -1 的實數 k 值
(E) 沒有任何實數 k 值使得”此三元一次聯立方程組有無窮多組實數解 x,y,z”。

進階題

六、填充題。每題七分，共 7 分。

15. 矩形 ABCD。已知點 E 是$\overline{\text{AD}}$的中點，$\overline{\text{BE}}\perp\overline{\text{AC}}$於點 F，$\overline{\text{AF}}$的長度為 6，求$\overline{\text{DF}}$的長度。

$6\sqrt{3}$

證明題

七、證明題。每題七分，共 7 分。

16. 令 $x_0=0$。當 n 為正整數時，令$x_n=\sqrt{3x_{n-1}+1}$。請證明下列命題：

對於所有大於等於 2 的正整數n $(n\geq 2)$, $2\leq x_n\leq\frac{3+\sqrt{13}}{2}$。

提示：可嘗試使用數學歸納法。
若此命題不成立，請證明此命題不成立。

$x_1=\sqrt{3x_0+1}=1$

$x_2=\sqrt{3x_1+1}=\sqrt{4}=2$

① When $n=2$, $2\le \overset{=2}{x_2} \le \frac{3+1}{2} \le \frac{3+\sqrt{13}}{2}$, the statement holds.

具有數學熱枕且勇於挑戰的你，中正數學就是你最佳的選擇。

② Assume $2\le x_k\le\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ holds for any given integer $k\ge 2$.

then by assumption $\sqrt{3\cdot 2+1}\le \overset{x_{k+1}}{\overset{\shortparallel}{\sqrt{3x_k+1}}} \le \sqrt{3\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)+1}$

Since $2=\sqrt{4}\le\sqrt{7}$ & $3\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)+1=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2+2\left(\frac{3}{2}\right)\frac{\sqrt{13}}{2}$

so $2\le x_{k+1}\le\sqrt{\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2}=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$, the statement holds.

By Mathematical Induction, the statement holds for all $2\le n\in\mathbb{N}$.