

國立中正大學 113 學年度大學申請入學招生考試試題

系所：數學系

科目：基本數學

請一律於答案卷上作答

基礎題

一、單選題。每題四分，共 8 分。

1. 設 $X \sim B\left(6, \frac{1}{3}\right)$, $E(X) = \mu$, $\sigma(X) = \sigma$, 若 $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = \frac{a}{729}$, 則 a

最接近下列哪一個選項?

- (A) 500 (B) 600 (C) 700 (D) 800 (E) 以上皆非。

2. 設 $\omega = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$ 其中 $i = \sqrt{-1}$, 則 $(2 + \omega)(2 + \omega^2)(2 + \omega^3)(2 + \omega^4)$ 之

值為

- (A) 16 (B) 13 (C) 11 (D) 8 (E) 以上皆非。

二、填充題。每題四分，共 16 分。

3. 有一光線沿向量 $\langle 3, 0, -4 \rangle$ 射入，碰到平面 E 上一點 $A(1, 2, -1)$ 後反射光與向量

$\langle 3, -2, -6 \rangle$ 平行，求平面 E 之方程式。

4. A, B, C 為三獨立事件，已知 A 發生之機率為 $\frac{1}{2}$; A, B, C 三事件均發生之機

率為 $\frac{1}{24}$, 均不發生之機率為 $\frac{1}{4}$, 則 A, B, C 恰有一事件發生之機率為何?

5. 設 $a, b > 0$, 試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ab}{n^2} \left[\sqrt{n^2 - 1} + \sqrt{n^2 - 4} + \cdots + \sqrt{n^2 - (n-1)^2} \right]$ 。若極限

不存在，請寫不存在。

6. 求所有可能的實數 A, B 使得極限 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + Ax + A + 3}{x^2 + x - 2} = B$ 成立。若不存在實數

A, B , 請寫下不存在。

中階題

三、單選題。每題七分，共 7 分。

7. 設 k 為一實數，若方程式 $y^2 - 2ky - kx^2 - 4x + 6 = 0$ 的圖形為貫軸與 x 軸平行之雙曲線，則 k 之範圍為

- (A) $k > 1 + \sqrt{3}$ (B) $0 < k < 1 + \sqrt{3}$ (C) $1 - \sqrt{3} < k < 1 + \sqrt{3}$ 但 $k \neq 0$
(D) $1 - \sqrt{3} < k < 1 + \sqrt{3}$ 但 $k \neq 0$ 或 $k < -2$ (E) 以上皆非。

四、填充題。每題七分，共 35 分。

8. 設 $f(x)$ 為一多項式使得 $f(1) = 2, f(2) = 6, f'(1) = 3, f'(2) = 5$ ，和 $f'(6) = 13$ 。令 $F(x) = f(xf(xf(x)))$ ，求 $F'(1)$ 之值。

9. 設 n 為自然數，化簡 $\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{n\pi}{n}$ 。

10. 設 $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ ， $P = \begin{bmatrix} 1 & s \\ t & 1 \end{bmatrix}$ 。若 $AP = PB$ ，求 A^{2024} 。

11. 求 x 的範圍使得對數不等式 $\log_{2-x}(9 - 8x) \geq \log_{2-x}(7x - 5)$ 成立。

12. 令 $f(x) = x^3 - 2x + 1$ ，計算極限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_2^{2x} f(t) dt$ ，若極限不存在，請寫不存在。

五、多選題。每題十分，共 20 分。

13. 下列關於 $(x + y + z + u)^6$ 的展開式之敘述哪些是正確的？

- (A) 各項係數的和為 4096。 (B) 共有 84 個相異項。
(C) x^3y^2z 之係數為 60。 (D) x^4yz 之係數為 30。
(E) x^4yz 的同型項有 12 個。

14. 下列選項何者正確。

- (A) 不存在函數 f 使得 f' 在某點 $x = c$ 無定義但 $f''(c)$ 存在。
(B) 若 f' 在其定義域為零函數，則函數 f 在其定義為常數函數。
(C) 若 f 是一個可微函數且 f 在 $x = c$ 有相對極小值，則當 $x < c$ 且夠靠近 c 時有 $f''(x) < 0$ ，當 $x > c$ 且夠靠近 c 時有 $f''(x) > 0$ 。

(D) 設 P, Q 為多項式且 $\deg P = \deg Q + 1$ ，則 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 有漸進線。

(E) 設 $f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ，則 $f''(0) = 0$ 。

進階題

六、填充題。每題七分，共七分。

15. 令 $d(n)$ 為整除 n 的最大奇數，而 $S(n) = d(1) + d(2) + \cdots + d(n)$ 。

若 $S(2^k) \geq 2^{113}$ ，則 k 的最小可能值為何？

證明題

七、證明題。每題七分，共七分。

16. 令 $x_1 = x_2 = 1$ ， $x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1}$ ， $n = 3, 4, \dots$ 。請證明 3 整除 x_n 若且唯若 3 整除 n 。

提示：利用反證法和數學歸納法。

具有數學熱忱且勇於挑戰的你，中正數學歡迎你的加入。