

# 國立中正大學

## 113 學年度碩士班招生考試

### 試題

#### [第 1 節]

科目名稱	基礎數學
系所組別	數學系統計科學

#### —作答注意事項—

※作答前請先核對「試題」、「試卷」與「准考證」之系所組別、科目名稱是否相符。

1. 預備鈴響時即可入場，但至考試開始鈴響前，不得翻閱試題，並不得書寫、畫記、作答。
2. 考試開始鈴響時，即可開始作答；考試結束鈴響畢，應即停止作答。
3. 入場後於考試開始 40 分鐘內不得離場。
4. 全部答題均須在試卷（答案卷）作答區內完成。
5. 試卷作答限用藍色或黑色筆（含鉛筆）書寫。
6. 試題須隨試卷繳還。

國立中正大學 113 學年度碩士班招生考試試題

科目名稱：基礎數學

本科目共 1 頁 第 1 頁

系所組別：數學系統計科學

1. (10%) If  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = \infty$ , and  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf'''(x)}{f''(x)} = 1$ , find the value of  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf'(x)}{f(x)}$ .
2. (10%) For  $x \in \mathbb{R}$ , what is  $\frac{d}{dx} \{ \tan^{-1} x \}$ ?
3. (10%) For  $t \in \mathbb{R}$ , what is  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|s|}{2\pi} e^{\frac{-(1+t^2)s^2}{2}} ds$ ?
4. (10%) Find the Taylor series expansion of  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$  at  $x=0$ .
5. (10%) Refer to the previous question, find the value of  $f^{(15)}(0)$ .
6. (10%) Find and test the extrema of function  $f(x, y) = x^3 - y^3 - 3xy + 4$ ,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ .
7. (10%) Let  $X$  be a  $n \times p$  matrix with  $n > p$ . Suppose  $X^T$  is its transpose matrix and  $X^T X$  is invertible. Denote  $H = X(X^T X)^{-1} X^T$ . Find the trace of  $H$ .
8. (10%) Refer to the previous question, find the determinant of  $H$ .
9. (10%) Let  $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ . Find  $\lim_{n \rightarrow \infty} (M^{-1})^n$ .
10. (10%) Find a  $2 \times 3$  matrix  $B$  such that  $B^T B = A$ , where  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$ .