

國立中正大學

108 學年度碩士班招生考試

試題

[第 2 節]

系所組別	數學系
科目名稱	線性代數

—作答注意事項—

※作答前請先核對「試題」、「試卷」與「准考證」之系所組別、科目名稱是否相符。

1. 預備鈴響時即可入場，但至考試開始鈴響前，不得翻閱試題，並不得書寫、畫記、作答。
2. 考試開始鈴響時，即可開始作答；考試結束鈴響畢，應即停止作答。
3. 入場後於考試開始 40 分鐘內不得離場。
4. 全部答題均須在試卷（答案卷）作答區內完成。
5. 試卷作答限用藍色或黑色筆（含鉛筆）書寫。
6. 試題須隨試卷繳還。

INSTRUCTION: To earn partial credits, show your work.

NOTATION: Null space $N(T)$ of T ; Range $R(T)$ of T ; Direct sum \oplus

1. (20 points) Let V be a finite-dimensional vector space and $T : V \rightarrow V$ be linear.

Prove that $V = R(T) \oplus N(T)$ if $R(T) \cap N(T) = \{0\}$.

2. (12+8) Consider the following system:

$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 1$$

$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2$$

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1$$

(i) Compute inverse A^{-1} of the coefficient matrix A .

(ii) Use A^{-1} to solve the system.

3. (20) Prove that $\det(M) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$ for the following matrix:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

4. (12+8) (i) Find a matrix P such that $P^{-1}AP$ is a diagonal matrix D , where

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(ii) Using D in (i), evaluate A^3 .

5. (12+8) (i) Find the Jordan canonical form J of the following matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

(ii) Using J in (i), evaluate A^2 .